www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

## Préambule

On se propose de simuler la diffusion de la chaleur le long d'un fil, puis sur une plaque, par la méthode dite *des éléments finis*. On étudiera principalement la vitesse et la précision du calcul de la position d'équilibre thermique, la température de quelques points étant imposée.

## Première partie

On considère que le fil est composé de $p+2$ éléments numérotés de 0 à $p+1$. Les deux éléments extrêmes se voient affectés des températures constantes 0 au point 0 et 1 au point $p+1$. Les autres points ont une température initiale $V_x(0)$ au point $x$. La variation au cours du temps, qui est lui aussi représenté par les entiers plutôt que par les réels, est décrite par la relation qui donne la température $V_x(n+1)$ au point $x$ à l'instant $n+1$ en fonction des températures à l'instant précédent

$$\begin{cases} V_x(n+1) = \frac{1}{2}\left(V_{x-1}(n) + V_{x+1}(n)\right) \\ V_0(n+1) = 0 \\ V_{p+1}(n+1) = 1 \end{cases}$$

En introduisant le vecteur $V(n)$ de composantes $V_x(n), 1 \le x \le p$, ces égalités peuvent se résumer en $V(n+1) = MV(n) + A$ pour une matrice convenable $M$ à $p$ lignes et $p$ colonnes, et un vecteur convenable $A$ à $p$ composantes.

**1** Préciser la matrice $M$ et le vecteur $A$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $M$. Indication : chercher les vecteurs propres $X^t$ de composantes $X^t_x = \sin(tx)$.

**2** Montrer qu'il existe une seule répartition $W$ des températures réalisant l'état stationnaire, c'est à dire $W = MW + A$.

**3** Préciser $W$ et montrer que $V(n) \to W$ quand $n \to \infty$. Indication : décomposer $V(0) - W$ sur les vecteurs propres de $M$.

**4** On se place dans le cas où la température initiale $V(0)$ est nulle sauf au point $p+1$ où elle vaut 1.

a Au bout de combien de temps peut-on être sûr que la quantité

$$\|V(n) - W\| = \sqrt{\sum_{x=1}^{p} \left(V_x(n) - W_x\right)^2}$$

reste inférieure à un réel positif donné $\epsilon$ ?

b En déduire un instant à partir duquel on a certainement

$$\max_{1 \le x \le p} |V_x(n) - W_x| < \epsilon$$

c Pour $p = 3$, donner le plus petit $n$ à partir duquel on a

$$\max_{1 \le x \le 3} |V_x(n) - W_x| < \tfrac{1}{10}.$$

## Deuxième partie

On considère maintenant une plaque rectangulaire, elle est modélisée par une collection d'éléments carrés, dont les coordonnées sont les couples d'entiers $x, y$ avec $0 \le x \le p+1$ et $0 \le y \le q+1$. La température $V_{x,y}(n+1)$ du point $x, y$ intérieur (c'est à dire avec $1 \le x \le p$ et $1 \le y \le q$) à l'instant $n+1$ est donnée par

$$V_{x,y}(n+1) = \frac{1}{4}\left(V_{x-1,y}(n) + V_{x+1,y}(n) + V_{x,y+1}(n) + V_{x,y-1}(n)\right)$$

et les températures aux bords $V_{0,y}, V_{p+1,y}, V_{x,0}, V_{x,q+1}$ sont fixes. Autrement dit, on a une relation du type $V(n+1) = L(V(n)) + B$ où

- $V(n)$ et $V(n+1)$ sont dans l'espace vectoriel $E$ des applications de l'ensemble des $pq$ éléments intérieurs vers $\mathbb{R}$
- $B$ est un élément de $E$ qui traduit l'influence du bord sur les voisins du bord.
- $L$ est une application linéaire de $E$ dans $E$.

**1** Montrer que les vecteurs $X^{u,v}, 1 \le u \le p, 1 \le v \le q$ de coordonnées

$$X^{u,v}_{x,y} = \sin\frac{ux\pi}{p+1} \sin\frac{vy\pi}{q+1}$$

forment une base de vecteurs propres pour $L$ et donner les valeurs propres correspondantes.

**2** En déduire l'existence et l'unicité d'un état stationnaire $W$, tel que $W = LW + B$

**3** Calculer cette répartition pour $p = q = 3$ avec les températures sur les bords suivantes :

a $V_{x,0} = V_{x,4} = 1,\ V_{0,y} = V_{4,y} = -1,\ 1 \le x, y \le 3$

b $V_{x,0} = V_{0,y} = 1,\ V_{x,4} = V_{4,y} = -1,\ 1 \le x, y \le 3$

(il est recommandé de tenir compte des symétries)

**4** Montrer que les vecteurs $Y^u$ avec $1 \le u \le p$ de coordonnées $Y^u_{x,y} = \sin\frac{ux\pi}{p+1}\mathrm{sh}(\alpha_u y)$

où $\alpha_u = \mathrm{Argch}\left(2 - \cos\frac{u\pi}{p+1}\right)$ forment une base de l'espace des répartitions de température stationnaires avec $V_{0,y} = V_{p+1,y} = V_{x,0} = 0$ et $V_{x,q+1}$ quelconque.

**5** Montrer que les vecteurs $Z^u$ restrictions des $Y^u$ aux éléments $x, q+1$ sont orthogonaux. En déduire un procédé de calcul de $W$ pour $V_{0,y} = V_{p+1,y} = V_{x,0} = 0$ et $V_{x,q+1} = Z$ donné.

**6** Donner le résultat de ce calcul pour $p = 3, q = 2$, et $Z = 1$

## Troisième partie

Cette fois la plaque n'est plus rectangulaire, mais elle reste plane. On la simule avec un sous-ensemble des carrés d'une plaque rectangulaire. de dimension $p \times q$ (bords non compris). La température est donnée par $V(n+1) = NV(n) + B$ où $N$ et $B$ traduisent que chaque élément intérieur (c'est à dire ayant ses 4 voisins sur la plaque et où on n'impose pas la température) reçoit à l'instant $n+1$ la moyenne des températures des 4 éléments voisins à l'instant $n$.

**1** Montrer que les valeurs propres de $N$ sont toutes réelles et majorées en valeur absolue par $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{p+1} + \cos\frac{\pi}{q+1}\right)$.

**2** Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $N$, alors $-\lambda$ l'est aussi, avec la même multiplicité

**3** Etablir l'existence et l'unicité d'un état stationnaire $W$.

**4** Indiquer le comportement de la température $V(n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**5** Si à l'instant $n$ donné, on a l'inégalité $\max_{x,y} |V_{x,y}(n) - V_{x,y}(n+1)| < m$, quel encadrement peut-on en déduire pour $W$ ?

**6** Lorsque la température initiale $V(0)$ est nulle sur la plaque, et fixée à des valeurs comprises entre 0 et 1 aux points où on peut l'imposer, au bout de combien de temps peut-on garantir que $\max_{x,y} |V_{x,y}(n) - W_{x,y}| < \epsilon$ ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail